Módulo 07
Detección y Corrección de Errores (Pt. 4)

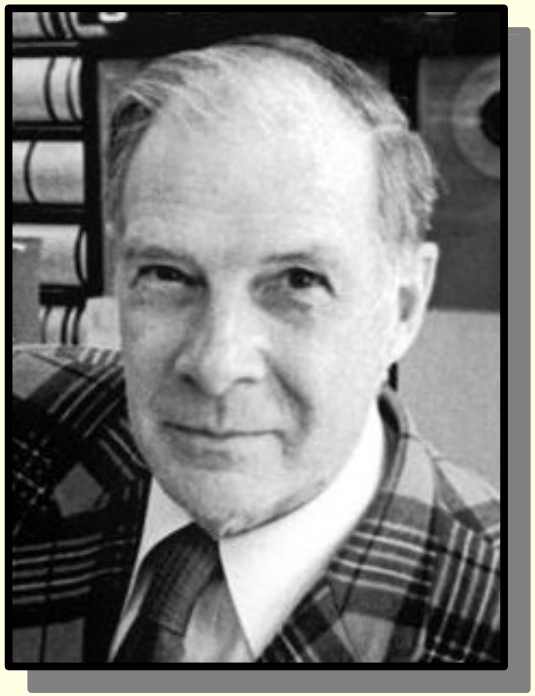
Organización de Computadoras
Depto. Cs. e Ing. de la Comp.
Universidad Nacional del Sur

Copyright

Contenidos

- Concepto de error
- Mínima distancia de un código
- Mecanismos de detección de errores
- Paridad aplicada en los códigos **VRC** y **LRC**
- Generación y verificación de código **CRC**
- Mecanismos de corrección de errores
- Códigos correctores simples
- Hamming mínima distancia 3 y 4

Código Hamming

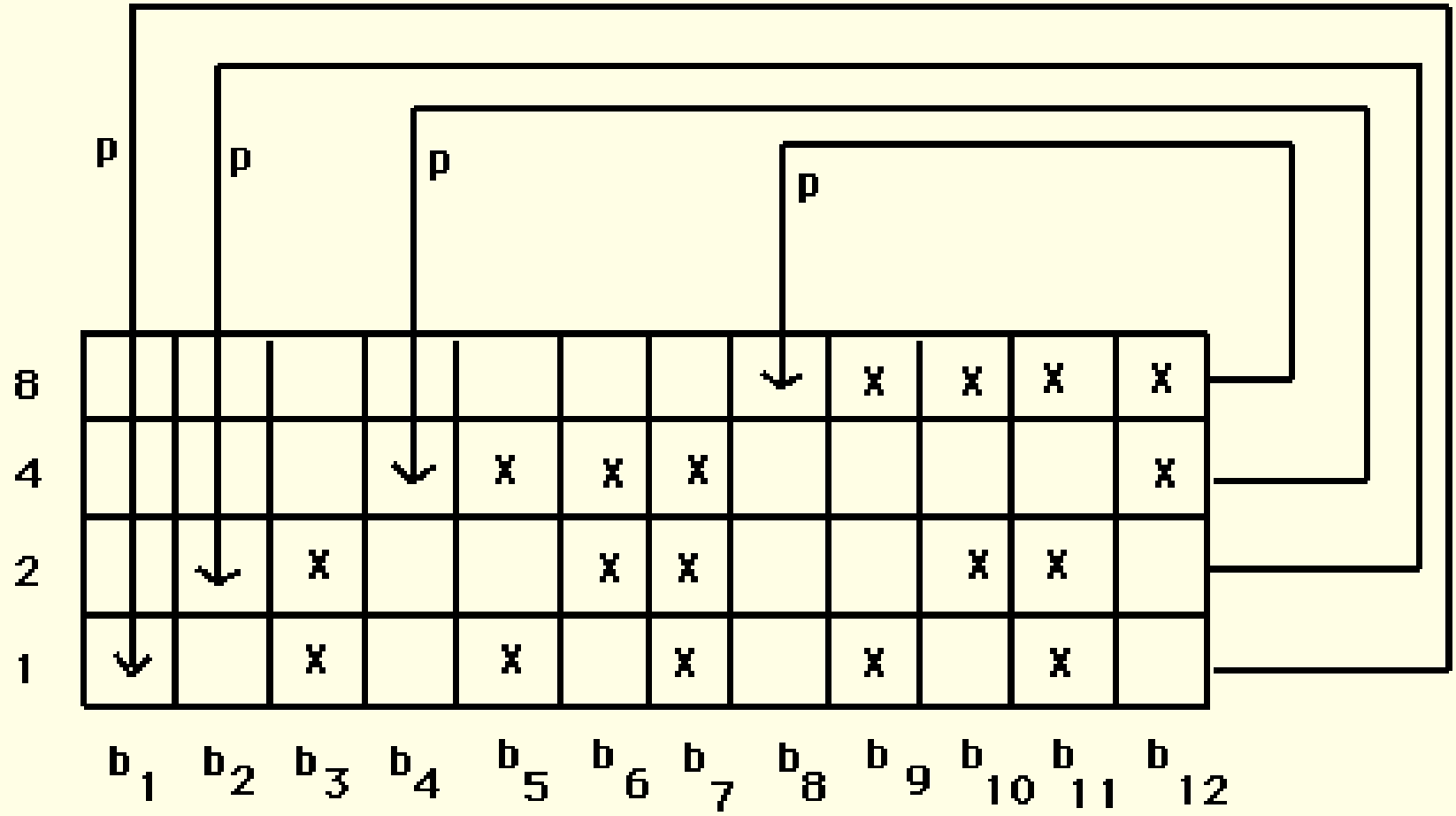


- El código Hamming fue inventado en 1950 por Richard W. Hamming (1915-1998), uno de los padres de la computación
- Se basa en conceptos conocidos:
  - El mensaje se divide en dos partes, los datos a ser transmitidos y la redundancia que se le agregará
  - La redundancia agregada al dato se compone esencialmente de bits de paridad

Código Hamming

- Se trata de un código mínima distancia **3**, el cual intercala bits de código con bits de datos
  - Para esto se reservan las posiciones potencias de **2** para alojar bits de código, usando las restantes para los bits de dato
  - Por caso, para $m = 8$ se deben incorporar tantos bits de código cómo sea necesario para satisfacer la inecuación $8 + r + 1 \leq 2^r$
  - Recién $r = 4$ satisface esta restricción, por lo que los bits de código ocuparan las posiciones **1**, **2**, **4** y **8**

Código Hamming



relación entre los bits de código
y los bits de datos

Código Hamming

- Como se puede observar, cada bit de código cubre sólo algunos de los bits de datos:
  - El bit de código en la posición **1** sólo cubre los datos en las posiciones **3**, **5**, **7**, **9** y **11**
  - El bit de código en la posición **2** sólo cubre los datos en las posiciones **3**, **6**, **7**, **10** y **11**
  - El bit de código en la posición **4** sólo cubre los datos en las posiciones **5**, **6**, **7** y **12**
  - El bit de código en la posición **8** sólo cubre los datos en las posiciones **8**, **9**, **10**, **11** y **12**

Código Hamming

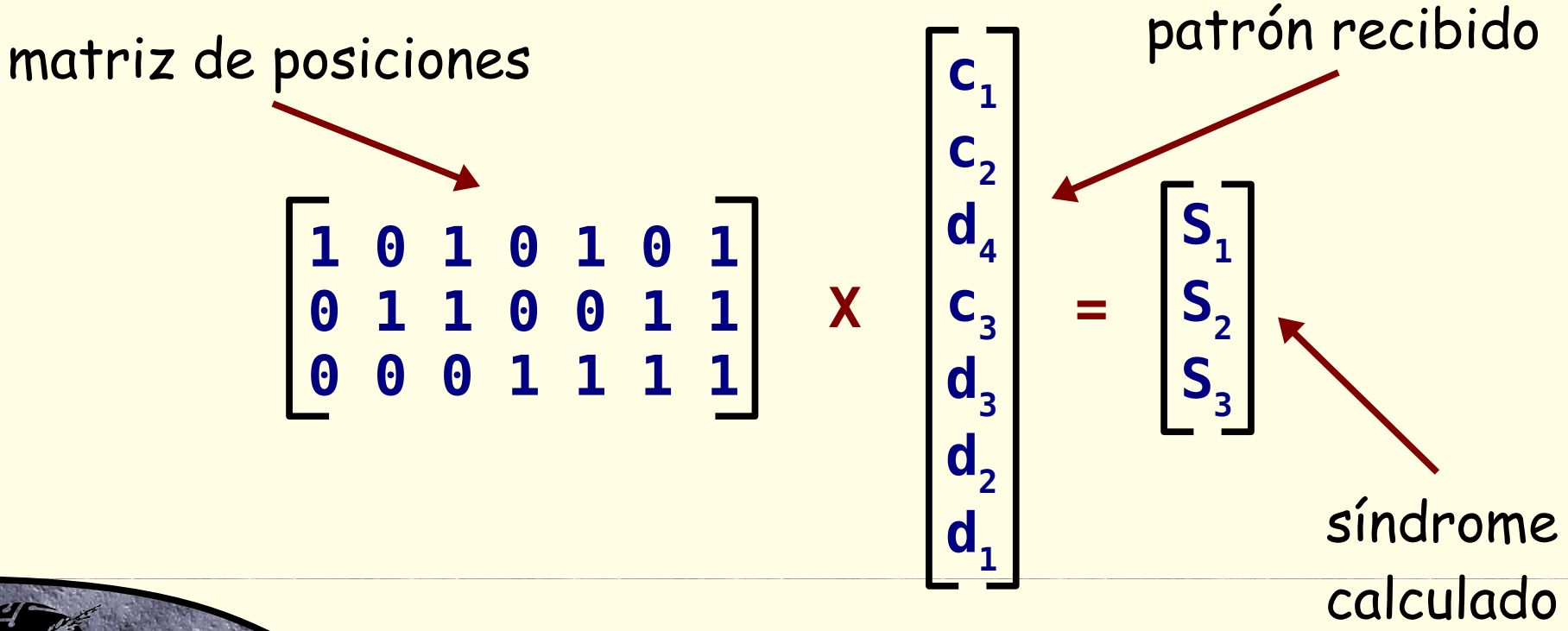
- Nótese que cada bit de código sólo cubre los bits de datos en las posiciones que en binario involucren a ese bit:

0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

c_1	c_2	d_8	c_3	d_7	d_6	d_5	c_4	d_4	d_3	d_2	d_1

Cálculo del síndrome

- Esta matriz de posiciones binarias se puede usar en conjunción al patrón de bits recibido para determinar si se produjeron o no errores



Cálculo del síndrome

- El síndrome obtenido permite establecer si se produjo algún error en la transmisión:
  - Si se obtiene un síndrome nulo (esto es, $[0\ 0\ 0]^t$), no se produjeron errores
  - Caso contrario, el síndrome marca la posición donde aparentemente se produjo el error
- Este cálculo equivale a calcular paridad par sobre los bits del mensaje, puesto que:

$$S_1 = c_1 \oplus d_4 \oplus d_3 \oplus d_1$$
$$S_2 = c_2 \oplus d_4 \oplus d_2 \oplus d_1$$
$$S_3 = c_3 \oplus d_3 \oplus d_2 \oplus d_1$$

¿Paridad par o impar?

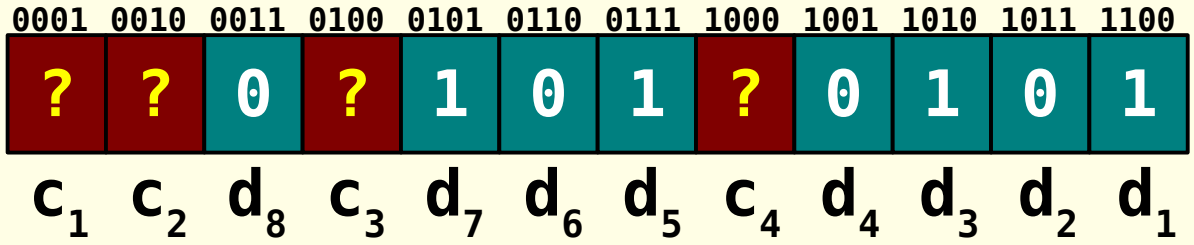
- El producto de matrices anterior permite calcular los bits de código en caso de hacer uso de paridad par
- Naturalmente, también se puede hacer uso de paridad impar, tomando su complemento
- La capacidad de detección y corrección de errores del código Hamming no depende del esquema de paridad elegido

Ordenamiento de los bits

- Existen dos formas de numerar las posiciones en un cierto patrón de bits:
  - De derecha a izquierda, con la primera posición en el extremo derecho y la última en el extremo izquierdo
  - De izquierda a derecha, con la primera posición en el extremo izquierdo y la última en el extremo derecho
- El funcionamiento del código Hamming no se verá afectado por el ordenamiento de los bits, siempre y cuando los bits de código se sigan computando correctamente

Cálculo de los bits de código

- Supongamos que se desea transmitir el patrón de bits **01010101**, usando Hamming, paridad par, ordenando los bits de izquierda a derecha



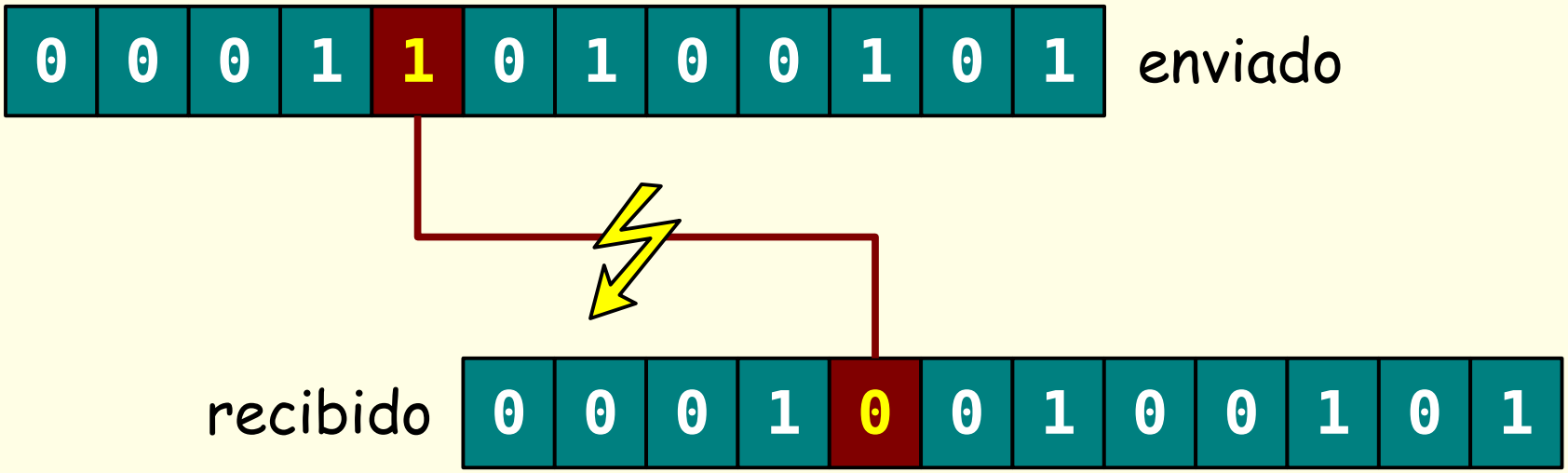
$$c_1 = p(d_8, d_7, d_5, d_4, d_2) = p(0,1,1,0,0) = 0$$
$$c_2 = p(d_8, d_6, d_5, d_3, d_2) = p(0,0,1,1,0) = 0$$
$$c_3 = p(d_7, d_6, d_5, d_1) = p(1,0,1,1) = 1$$
$$c_4 = p(d_4, d_3, d_2, d_1) = p(0,1,0,1) = 0$$

Política

- Recodemos que Hamming por tratarse de un código con **M = 3**, admite dos soluciones a las inecuaciones que vinculan **M**, **d** y **c**:
  - Una posibilidad es detectar y corregir errores simples
  - La otra es sólo detectar errores simples y dobles
- Cada una de estas alternativas constituye una política de detección y corrección de errores
  - La política que se vaya a usar en una determinada transmisión tiene que estar acordada de antemano

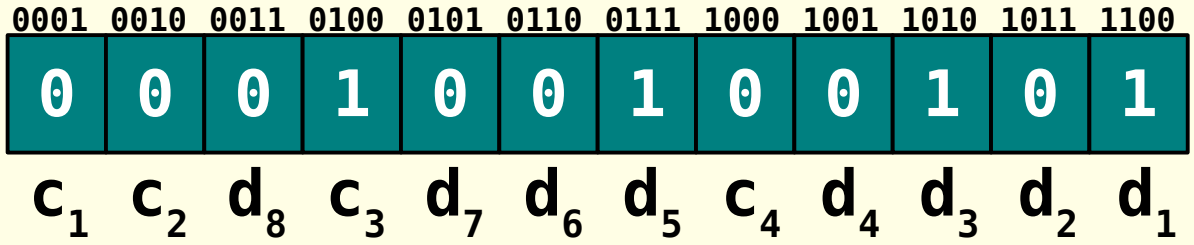
Corrección de errores simples

- Asumida una política de detección y corrección de errores simples, supongamos que se produjo el siguiente error simple sobre el dato antes calculado:



Corrección de errores simples

- Supongamos que se recibe el siguiente dato codificado usando Hamming y que la política adoptada es **c = 1** y **d = 1**



$$c'_1 = p(d_8, d_7, d_5, d_4, d_2) = p(0,0,1,0,0) = 1$$
$$c'_2 = p(d_8, d_6, d_5, d_3, d_2) = p(0,0,1,1,0) = 0$$
$$c'_3 = p(d_7, d_6, d_5, d_1) = p(0,0,1,1) = 0$$
$$c'_4 = p(d_4, d_3, d_2, d_1) = p(0,1,0,1) = 0$$

Corrección de errores simples

- Al haber adoptado la política de detección y corrección de errores simples, el síndrome apuntará al bit en error, en caso de existir
  - En primer lugar se recalculan los bits de código:

$$c'_4 = 0 \quad c'_3 = 0 \quad c'_2 = 0 \quad c'_1 = 1$$

  - Luego cotejamos estos valores con los recibidos, a fin de determinar el síndrome:

$$S_4 = 0 \oplus 0 \quad S_3 = 1 \oplus 0 \quad S_2 = 0 \oplus 0 \quad S_1 = 0 \oplus 1$$

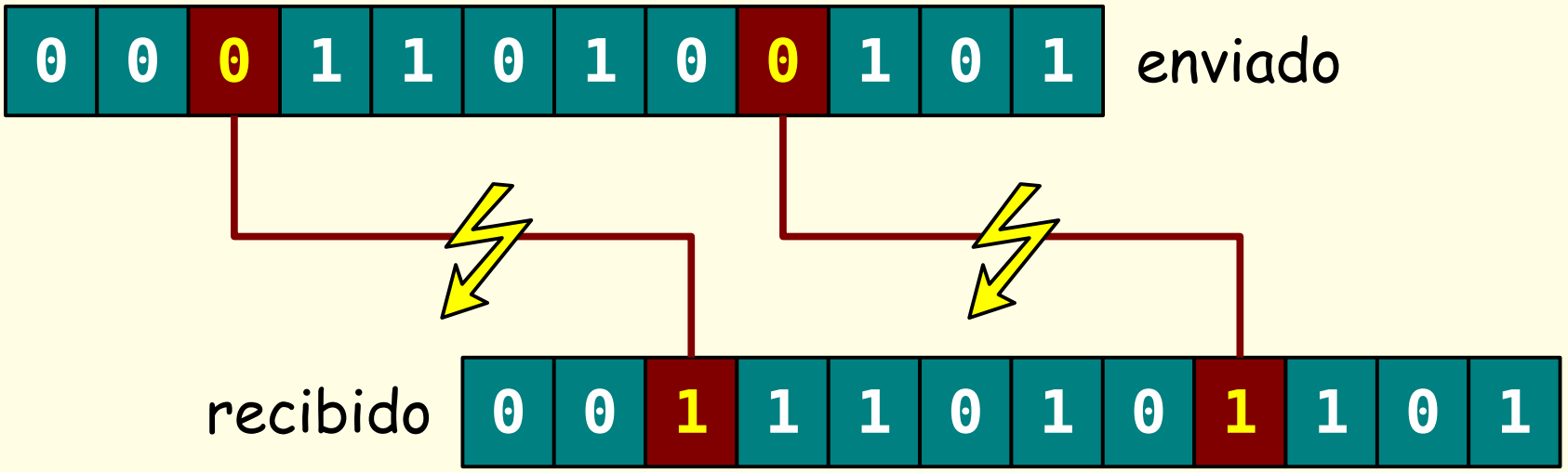
  - Como el síndrome apunta a la posición **5** (**0101**), ese bit fue el afectado por el error, se lo corrige

Corrección de errores simples

- En caso de hacer uso de la política de detección y corrección de errores simples, el síndrome necesariamente apuntará a la posición en la cual se produjo el error
- No obstante, en caso de hacer uso de la política de sólo detección de errores simples y dobles, el síndrome no va a representar una posición en concreto, por lo que simplemente se analiza si es o no nulo

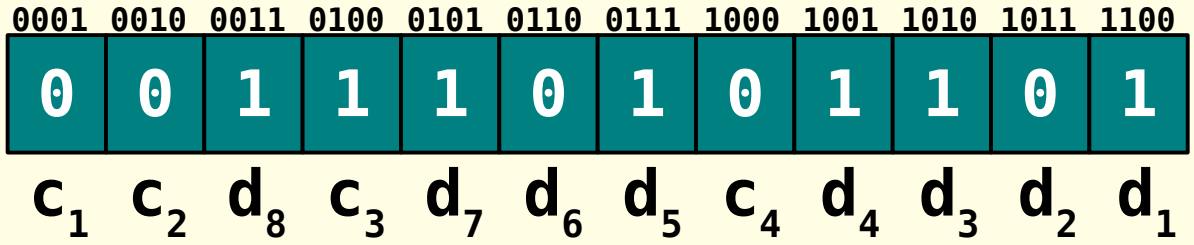
Detección simple y doble

- Asumida una política de detección de errores simples y dobles, supongamos que se producen los siguientes errores:



Detección simple y doble

- Supongamos que se recibe el siguiente dato codificado usando Hamming y que la política adoptada es **c = 0** y **d = 2**



$$c'_1 = p(d_8, d_7, d_5, d_4, d_2) = p(1,1,1,1,0) = 0$$
$$c'_2 = p(d_8, d_6, d_5, d_3, d_2) = p(1,0,1,1,0) = 1$$
$$c'_3 = p(d_7, d_6, d_5, d_1) = p(1,0,1,1) = 1$$
$$c'_4 = p(d_4, d_3, d_2, d_1) = p(1,1,0,1) = 1$$

Detección simple y doble

- Al haber adoptado la política de detección de errores simples y dobles, el síndrome sólo se usa para detectar y no para corregir
  - Los bits de código recalculados son:

$$c'_4 = 1 \quad c'_3 = 1 \quad c'_2 = 1 \quad c'_1 = 0$$

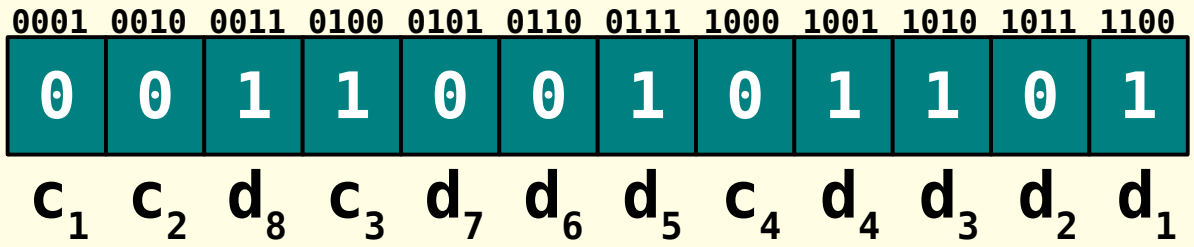
  - Cotejando estos valores con los recibidos da que:

$$S_4 = 0 \oplus 1 \quad S_3 = 1 \oplus 1 \quad S_2 = 0 \oplus 1 \quad S_1 = 0 \oplus 0$$

  - El síndrome apunta a la posición **10** (**1010**), (¡¡que no está en error!!), como es no nulo, se detecta el error. Obsérvese que se desconoce si fue simple o doble

Ejemplo para pensar

- Supongamos que se recibe el siguiente dato codificado usando Hamming y que la política adoptada es $c = 0$ y $d = 2$



$$c'_1 = p(d_8, d_7, d_5, d_4, d_2) = p(1,0,1,1,0) = 1$$
$$c'_2 = p(d_8, d_6, d_5, d_3, d_2) = p(1,0,1,1,0) = 1$$
$$c'_3 = p(d_7, d_6, d_5, d_1) = p(0,0,1,1) = 0$$
$$c'_4 = p(d_4, d_3, d_2, d_1) = p(1,1,0,1) = 1$$

Ejemplo para pensar

- El síndrome en este caso da fuera de rango, ¿qué se puede inferir de esto?
  - Los bits de código recalculados son:

$$c'_4 = 1 \quad c'_3 = 0 \quad c'_2 = 1 \quad c'_1 = 1$$

  - Cotejando estos valores con los recibidos da que::

$$S_4 = 0 \oplus 1 \quad S_3 = 1 \oplus 0 \quad S_2 = 0 \oplus 1 \quad S_1 = 0 \oplus 1$$

  - El síndrome apunta a la posición **15** (**1111**), por lo que se tiene la certeza de que no se produjo un error simple; en consecuencia, se detecta un error doble

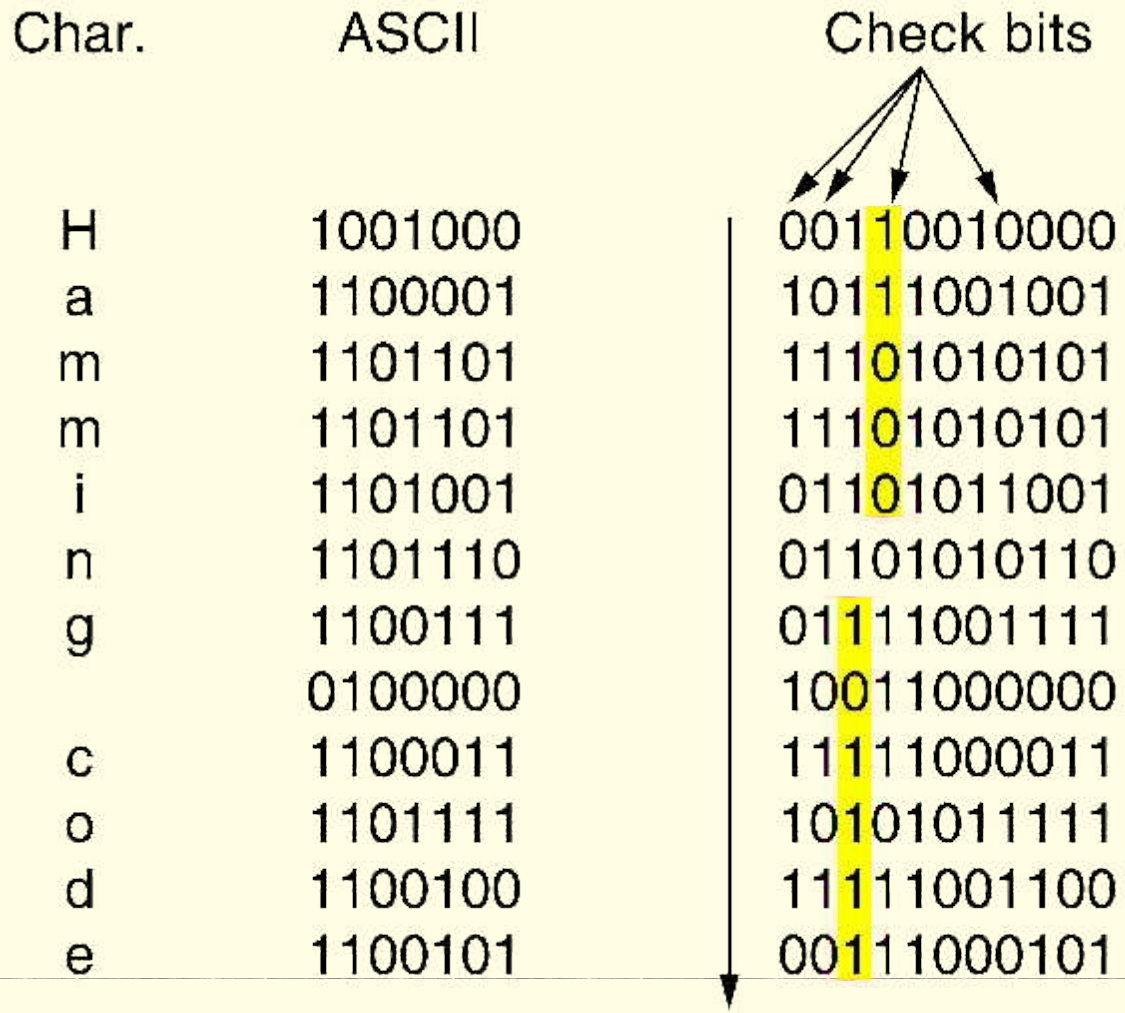
Ejemplo para pensar

- ¿Qué sucederá si rehacemos el ejemplo anterior bajo la restante política, **c = 1** y **d = 1**?
  - El recálculo de los bits de código y del síndrome no cambia, es decir, el síndrome volverá a apuntar a la posición **15** (**1111**)
  - Nuevamente, se tiene la certeza de que no se produjo un error simple, por lo que no se corrige y se detecta el error de más de un bit
  - Ahora bien, ¿no estamos acaso corrigiendo errores simples y detectando errores simples y dobles con un código cuya mínima distancia es **3**?

Detección de ráfagas

- El código Hamming mínima distancia **3** corrige a lo sumo errores simples
  - Es decir, no es capaz de corregir errores en ráfaga
- No obstante, es posible aplicar una estrategia análoga a la usada en el código **LRC**:
  - Supongamos que se desea transmitir **k** mensajes codificados con Hamming, cada una de longitud **n**
  - La idea es ubicar estos patrones en una matriz y transmitir esos bits columna por columna en vez de hacerlo fila por fila

Detección de ráfagas



los bits amarillo denotan el error en ráfaga que se produjo

Análisis

- Si ocurre una ráfaga de longitud **k** en el bloque de **k × n** (y ningún otro error), se verá afectado a lo sumo un bit de cada patrón
  - Por ende, el código Hamming será capaz de reconstruir cada patrón correctamente
  - Es decir, esta codificación está en condiciones de reconstruir el bloque por completo
- En síntesis, utilizar **kr** bits de control permite hacer que **km** bloques de bits de datos resulten inmunes a ráfagas hasta de longitud **k**

Hamming mínima distancia 4

- La mínima distancia del código Hamming puede ser incrementada de **3** a **4** incorporando un bit de paridad que cubra la totalidad del mensaje:

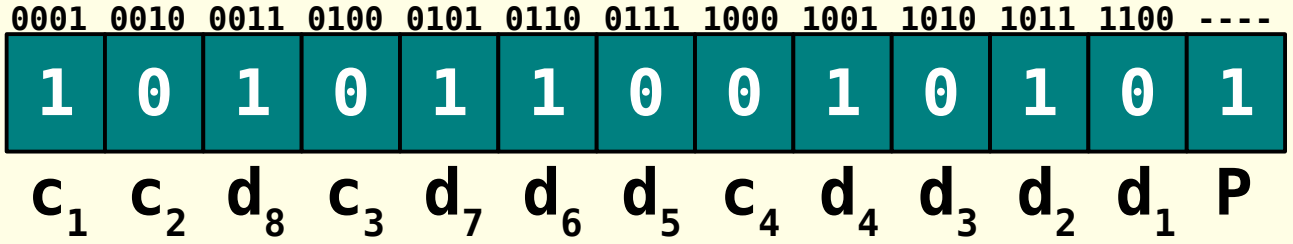
- En ocasiones denominaremos a la variante sin paridad Hamming básico y a la variante con paridad Hamming extendido

Hamming mínima distancia 4

- Qué efecto tiene la incorporación del bit adicional del paridad?
  - Al incrementar la mínima distancia a 4, aparecen nuevas soluciones a las inecuaciones que relacionan a **M**, **c** y **d**: ahora es posible hacer uso de las políticas **c = 0** y **d = 3** ó **c = 1** y **d = 2**
  - Nótese que Hamming extendido ahora permite distinguir los errores simples de los errores dobles
  - Esto posibilita corregir al estar en presencia de un error simple y no hacerlo ante un error doble (ya que el síndrome apuntará a cualquier lado)

Detección y corrección

- Supongamos que se recibe el siguiente dato codificado usando Hamming y que la política adoptada es **c = 1** y **d = 2**



$$c'_1 = p(d_8, d_7, d_5, d_4, d_2) = p(1,1,0,1,1) = 0$$
$$c'_2 = p(d_8, d_6, d_5, d_3, d_2) = p(1,1,0,0,1) = 1$$
$$c'_3 = p(d_7, d_6, d_5, d_1) = p(1,1,0,0) = 0$$
$$c'_4 = p(d_4, d_3, d_2, d_1) = p(1,0,1,0) = 0$$

Detección y corrección

- Al haber adoptado la política $c = 1$ y $d = 2$, el síndrome apuntará al bit en error sólo en caso de que se produzca un error simple:
  - La paridad y los bits de código recalculados dan:

$$c'_4 = 0 \quad c'_3 = 0 \quad c'_2 = 1 \quad c'_1 = 0 \quad P' = 0$$

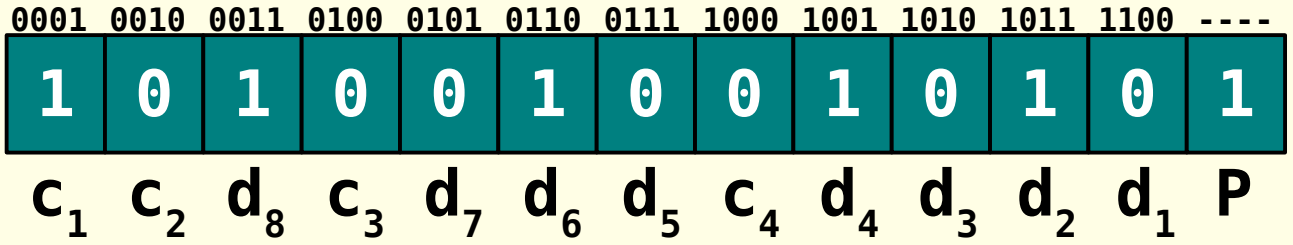
  - La construcción del síndrome da que:

$$S_4 = 0 \oplus 0 \quad S_3 = 0 \oplus 0 \quad S_2 = 0 \oplus 1 \quad S_1 = 1 \oplus 0$$

  - Como $P \oplus P' = 1$, se detecta una cantidad impar de errores, por lo que se corrige el bit señalado por el síndrome (esto es, el bit en la posición 0011)

Detección y corrección

- Supongamos que se recibe el siguiente dato codificado usando Hamming y que la política adoptada es **c = 1** y **d = 2**



$$c'_1 = p(d_8, d_7, d_5, d_4, d_2) = p(1,0,0,1,1) = 1$$
$$c'_2 = p(d_8, d_6, d_5, d_3, d_2) = p(1,1,0,0,1) = 1$$
$$c'_3 = p(d_7, d_6, d_5, d_1) = p(0,1,0,0) = 1$$
$$c'_4 = p(d_4, d_3, d_2, d_1) = p(1,0,1,0) = 0$$

Detección y corrección

- Recordemos que producto de la política en uso, el síndrome apuntará al bit en error sólo en caso de que se produzca un error simple:
  - La paridad y los bits de código recalculados dan:

$$c'_4 = 0 \quad c'_3 = 1 \quad c'_2 = 1 \quad c'_1 = 1 \quad P' = 1$$

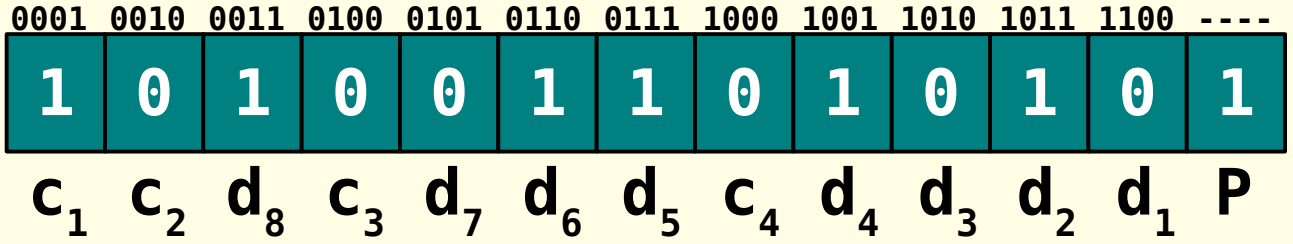
  - La construcción del síndrome da que:

$$S_4 = 0 \oplus 0 \quad S_3 = 0 \oplus 1 \quad S_2 = 0 \oplus 1 \quad S_1 = 1 \oplus 1$$

  - Como $P \oplus P' = 0$, se detecta una cantidad par de errores, por lo que el síndrome al ser no nulo permite detectar que se produjo un error doble

Detección sin corrección

- Supongamos que se recibe el siguiente dato codificado usando Hamming y que la política adoptada es **c = 0** y **d = 3**



$$c'_1 = p(d_8, d_7, d_5, d_4, d_2) = p(1,0,1,1,1) = 0$$
$$c'_2 = p(d_8, d_6, d_5, d_3, d_2) = p(1,1,1,0,1) = 0$$
$$c'_3 = p(d_7, d_6, d_5, d_1) = p(0,1,1,0) = 0$$
$$c'_4 = p(d_4, d_3, d_2, d_1) = p(1,0,1,0) = 0$$

Detección sin corrección

- Al haber adoptado la política $c = 0$ y $d = 3$, con respecto al síndrome sólo importa determinar si es nulo:
  - La paridad y los bits de código recalculados dan:

$$c'_4 = 0 \quad c'_3 = 0 \quad c'_2 = 0 \quad c'_1 = 0 \quad P' = 0$$

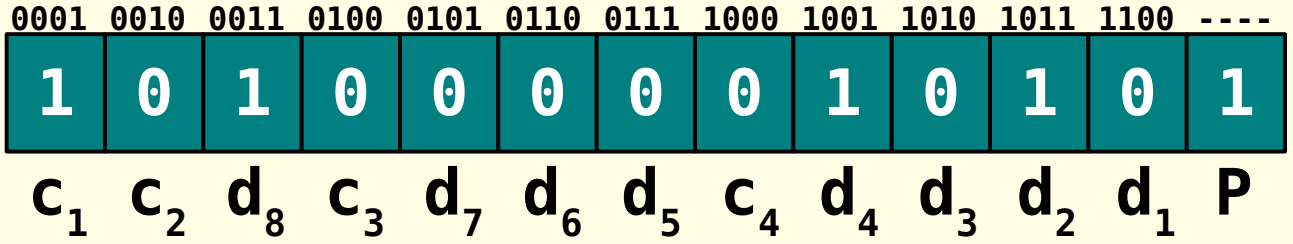
  - La construcción del síndrome da que:

$$S_4 = 0 \oplus 0 \quad S_3 = 0 \oplus 0 \quad S_2 = 0 \oplus 0 \quad S_1 = 1 \oplus 0$$

  - Como $P \oplus P' = 1$, se detecta una cantidad impar de errores; a su vez, como el síndrome es no nulo, se desconoce si se produjo un error simple o uno triple

Ejemplo para pensar

- Supongamos que se recibe el siguiente dato codificado usando Hamming y que la política adoptada es **c = 0** y **d = 3**



$$c'_1 = p(d_8, d_7, d_5, d_4, d_2) = p(1,0,0,1,1) = 1$$
$$c'_2 = p(d_8, d_6, d_5, d_3, d_2) = p(1,0,0,0,1) = 0$$
$$c'_3 = p(d_7, d_6, d_5, d_1) = p(0,0,0,0) = 0$$
$$c'_4 = p(d_4, d_3, d_2, d_1) = p(1,0,1,0) = 0$$

Ejemplo para pensar

- Al haber adoptado la política $c = 0$ y $d = 3$, sólo importa determinar si es nulo el síndrome:
  - La paridad y los bits de código recalculados dan:

$$c'_4 = 0 \quad c'_3 = 0 \quad c'_2 = 0 \quad c'_1 = 1 \quad P' = 0$$

  - La construcción del síndrome da que:

$$S_4 = 0 \oplus 0 \qquad S_3 = 0 \oplus 0 \qquad S_2 = 0 \oplus 0 \qquad S_1 = 1 \oplus 1$$

  - Como $P \oplus P' = 1$, se detecta una cantidad impar de errores; a su vez, como el síndrome es nulo, se detecta que se produjo un error en el bit de paridad o bien un error triple

Ejemplo para pensar

- ¿Qué sucederá si rehacemos el ejemplo anterior bajo la otra política, **c = 1** y **d = 2**?
  - El recálculo de los bits de código, de la paridad y del síndrome no cambia, es decir, el bit de paridad no da y el síndrome vuelve a ser nulo
  - En este caso se tiene la certeza de que no se produjo ni un error simple ni uno doble sobre los bits que corresponden al código Hamming mínima distancia **3**
  - En consecuencia, la única posibilidad es que el bit de paridad haya sido afectado por un error simple, el cual se detecta y es corregido

Tarea para el hogar

- Analizar qué determinación debemos tomar en cada uno de los siguientes escenarios bajo las dos políticas que admite Hamming mínima distancia 4:
  - Valida paridad, síndrome nulo
  - Valida paridad, síndrome en rango
  - Valida paridad, síndrome fuera de rango
  - No valida paridad, síndrome nulo
  - No valida paridad, síndrome en rango
  - No valida paridad, síndrome fuera de rango

¿Preguntas?